

Poboljšanje jedne geometrijske nejednakosti

Šefket Arslanagić¹

Poboljšati neku nejednakost je značajan i kreativan posao u matematici. Ovdje ćemo prikazati poboljšanje jedne geometrijske nejednakosti u trokutu koja glasi

$$s \geq 3\sqrt{3}r, \quad (1)$$

gdje je s njegov poluopseg, a r polumjer upisane mu kružnice.

Najprije ćemo prikazati tri razna dokaza ove nejednakosti.

Dokaz 1. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja, imamo (zbog $abc = 4RP$)

$$2s = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3\sqrt[3]{4RP},$$

a odavde koristeći poznatu jednakost $P = rs$ i *Eulerovu nejednakost* $R \geq 2r$, dobivamo

$$2s \geq 3\sqrt[3]{4Rrs} \geq 3\sqrt[3]{8r^2s},$$

odnosno

$$s \geq 3\sqrt{3}r.$$

Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$ (jednakostraničan trokut).

Dokaz 2. Opet na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{s}{3} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad (2)$$

Koristeći *Heronovu formulu* za površinu trokuta, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dobivamo

$$(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{P^2}{s} = \frac{r^2s^2}{s} = r^2s. \quad (3)$$

Sada iz (2) i (3) dobivamo

$$s \geq 3\sqrt[3]{r^2s} \iff s \geq 3\sqrt{3}r.$$

Dokaz 3. Koristit ćemo poznate formule koji se odnose na polumjere r_a , r_b , r_c pripisanih kružnica trokutu:

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c} \quad (4)$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \quad (5)$$

$$r_ar_br_c = sP. \quad (6)$$

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za tri pozitivna broja imamo

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{r_ar_br_c}},$$

¹ Autor je izvanredni profesor u miru s Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu; e-pošta: asefket@pmf.unsa.ba

a odavde iz (5) i (6)

$$\frac{1}{r} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{sP}},$$

odnosno

$$\frac{1}{r} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{rs^2}} \iff s \geq 3\sqrt{3}r.$$

Nejednakost (1) je ekvivalentna nejednakosti

$$s^2 \geq 27r^2. \quad (1')$$

Dokazat ćemo sada da vrijedi sljedeće poboljšanje nejednakosti (1') (odnosno (1)) koje glasi

$$s^2 \geq 27r^2 + \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]. \quad (7)$$

Dokaz. Koristit ćemo poznate jednakosti koje vrijede za trokut:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r^2 - 4Rr) \quad (8)$$

i

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr. \quad (9)$$

Sada zbog (8) i (9) imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] &= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) \\ &= 2(s^2 - r^2 - 4Rr) - (s^2 + r^2 + 4Rr) \\ &= s^2 - 3r^2 - 12Rr. \end{aligned} \quad (10)$$

Koristeći (10) sada dobivamo

$$\begin{aligned} s^2 &\geq 27r^2 + \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &\iff s^2 \geq 27r^2 + s^2 - 3r^2 - 12Rr \\ &\iff 12Rr \geq 24r^2 \\ &\iff R \geq 2r, \end{aligned}$$

a ovo je dobro poznata *Eulerova nejednakost*. Dakle, vrijedi i nejednakost (poboljšanje) (7).

Jednakost u (7) vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$ (jednakostraničan trokut).

Literatura

- [1] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004.
- [2] Š. ARSLANAGIĆ, *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.
- [3] O. BOTTEMA, i ostali, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.